INSTYTUT INŻYNIERII MATERIAŁOWEJ

WYDZIAŁ MECHANICZNY POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Podstawy Procesów i Konstrukcji Inżynierskich

Kinematyka

Prowadzący: dr inż. Marta Walczyńska

Kierunek Wyróżniony przez PKA

INZYNIERIAMATERIALOWAPL

Mechanika

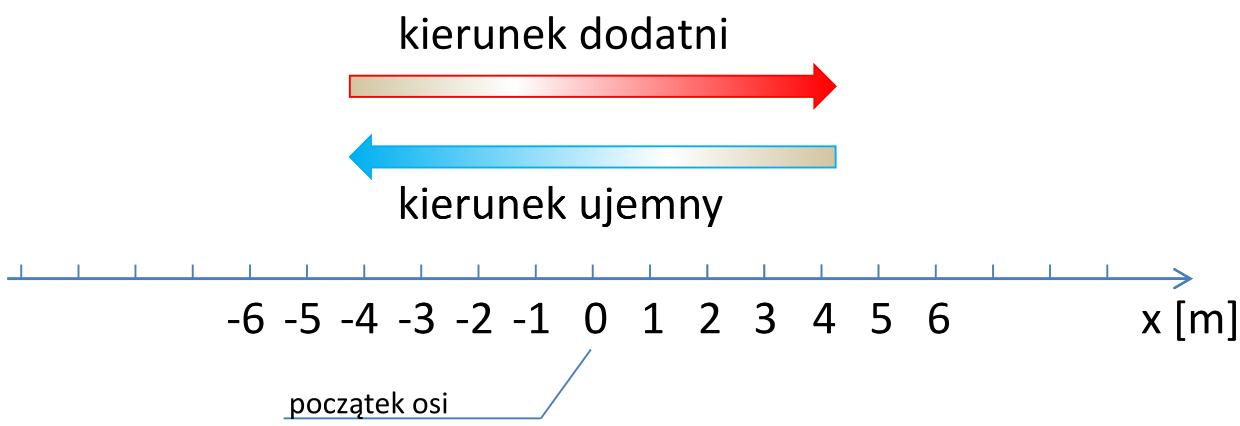
Kinematyka

Bada ruch ciał nie wnikając w przyczyny warunkujące ten ruch

Dynamika

Bada ruch w związku z jego przyczynami (wzajemne oddziaływanie ciał) od których zależy charakter ruchu.

Położenie i przemieszczenie



Kierunkiem dodatnim osi jest kierunek, w którym współrzędne punktów rosną. Kierunek przeciwny nazywamy kierunkiem ujemnym.

Przemieszczenie

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Δ – delta oznacza zmianę jakiejś wielkości i jest różnicą wartości końcowej i początkowej tej wielkości

Położenie i przemieszczenie

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

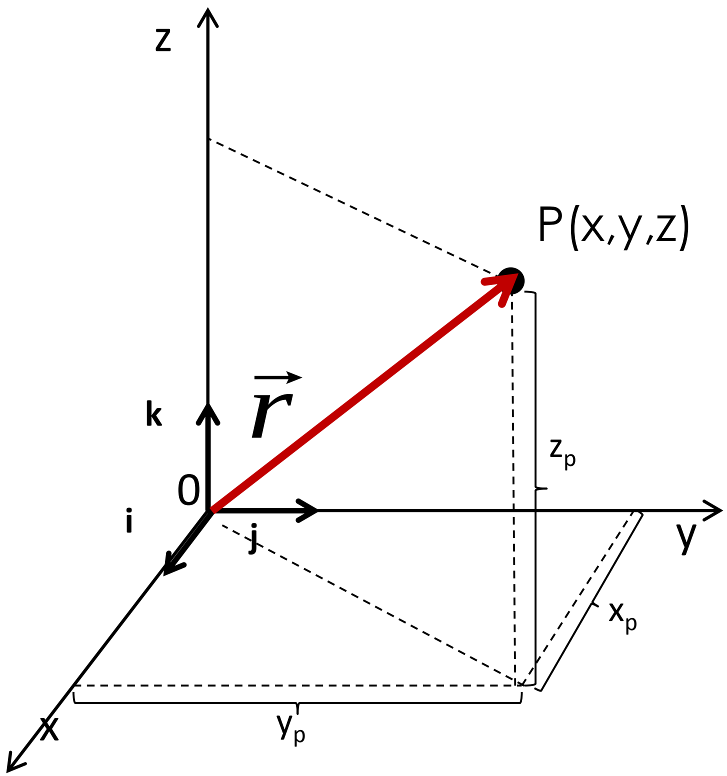
ZADANIE

Mając trzy pary położeń początkowych i końcowych proszę podać, które z nich dają ujemne przemieszczenie:

a) – 3m, +5m b) -3m, -7m c)7m, -3m

Całkowita droga, przebyta w trakcie ruchu nie ma znaczenia dla wartości przemieszczenia – liczy się tylko położenie początkowe i końcowe.

Wektor położenia



XYZ – układ odniesienia

$$\vec{r} = \vec{OP} -$$ wektor położenia

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

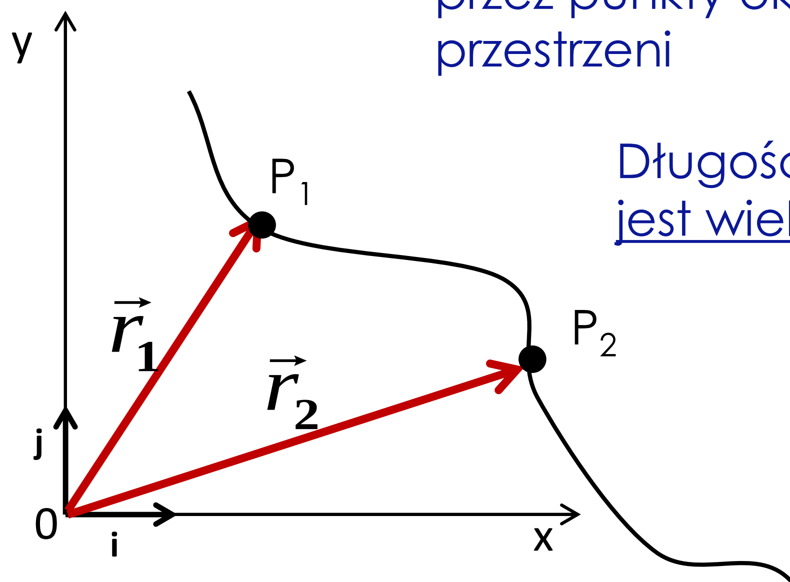
Długość wektora położenia w kartezjańskim układzie współrzędnych

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\vec{r}(t)$ wektor położenia zależy od czasu

Tor ruchu, droga

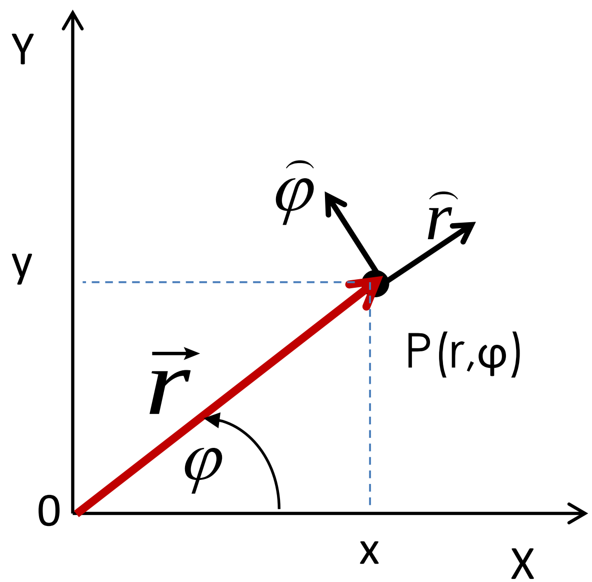
Tor ruchu ciała – krzywa lub prosta utworzona przez punkty określające kolejne położenia ciała w przestrzeni



Długością toru ***s*** nazywamy **drogę**. <u>Droga jest wielkością skalarną.</u>

Gdy tor jest linią prostą, mówimy, że ciało porusza się *ruchem prostoliniowym*, gdy zaś krzywą – ruch jest *ruchem krzywoliniowym*

Wektor położenia we współrzędnych biegunowych



Oś OX pokrywająca się z osią biegunową

$\vec{r} = \vec{OP}$ – wektor położenia

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$|\hat{r}|$ Wersor jednostkowy dla danego położenia wektora $|\hat{r}| = 1$

Wzory przejścia ze współrzędnych kartezjańskich x, y do biegunowych r, φ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{y}{x}$$

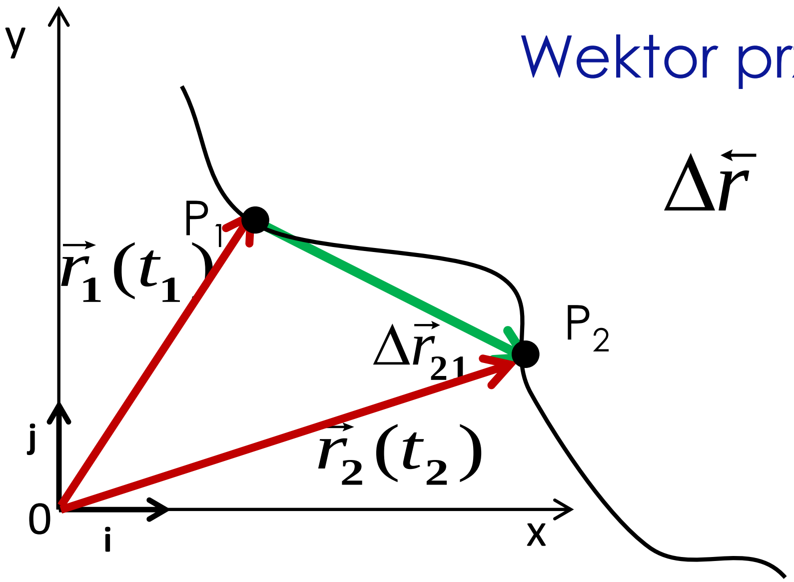
Wzory przejścia ze współrzędnych biegunowych r, φ do kartezjańskich x, y

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

Wektor przemieszczenia

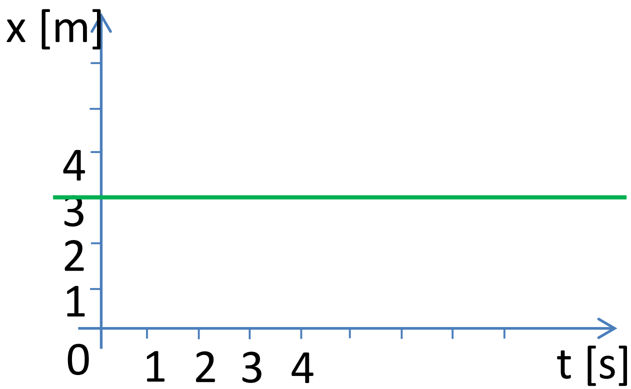
$$\Delta\vec{r} = r_2(t_2) - r_1(t_1)$$



Wektor przemieszczenia zależy od czasu

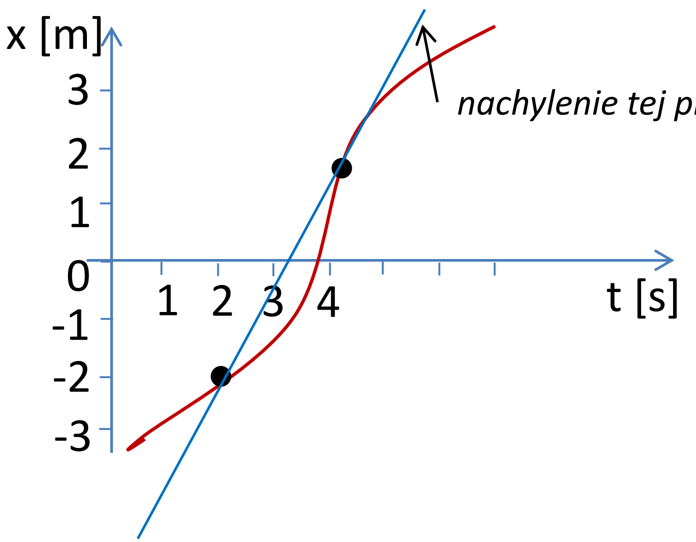
$\Delta\overleftarrow{r}$ jest wielkością wektorową

Prędkość średnia



$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{r_1 - r_2}{t_1 - t_2}$$

Prędkość średnia to stosunek przemieszczenia do czasu, w którym ciało się przemieściło

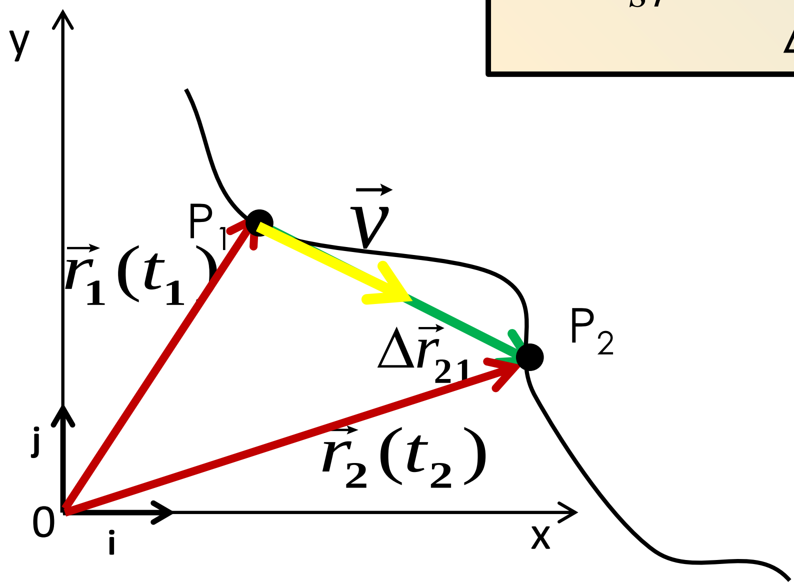


nachylenie tej prostej = $v_{śr} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Prędkość średnia

wektor prędkości średniej

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}_{21}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Prędkość a szybkość

Prędkością średnią ciała nazywamy stosunek wektora przemieszczenia ciała do czasu w którym to przemieszczenie nastąpiło.

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Wartością prędkości czyli szybkością ciała nazywamy stosunek drogi przebytej do czasu w jakim została przebyta.

$$v = \frac{s}{t}$$

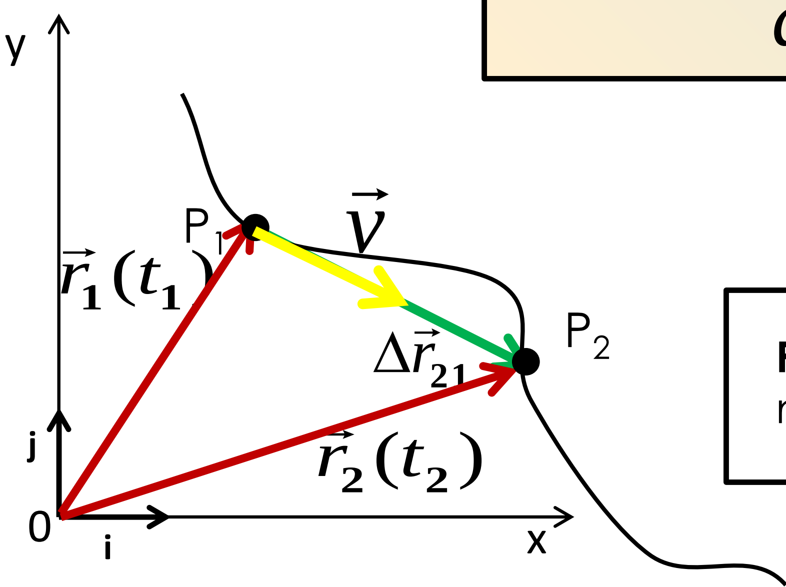
Szybkość średnia to skalarna wielkość fizyczna równa stosunkowi drogi przebytej przez ciało do czasu w jaki została on przebyta.

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Prędkość chwilowa

wektor prędkości chwilowej

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



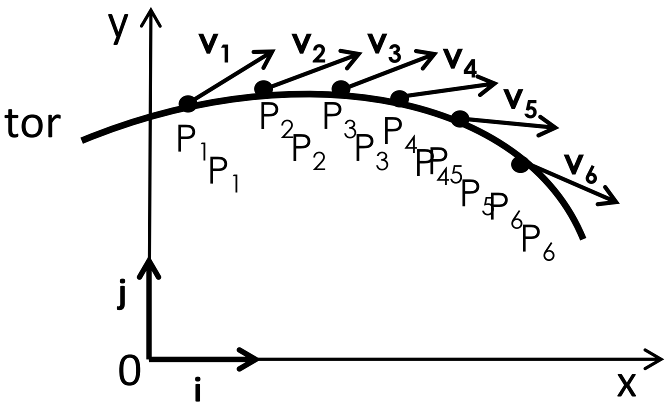
$$t_2 \to t_1 \_ czyli \_ \Delta t \to \mathbf{0}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to \mathbf{0}} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Prędkość chwilowa to prędkość w nieskończenie małym przedziale czasu

$$\frac{d\vec{r}}{d\vec{t}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

Prędkość chwilowa



Wektor prędkości chwilowej jest zawsze styczny do toru!

$$\frac{d\vec{r}}{d\vec{t}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

Prędkość chwilowa jako granica prędkości średniej

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}_{21}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{śr}}$$

Jednostki prędkości

Podstawową jednostką prędkości w układzie SI jest 1 "metr na sekundę".

$$[v] = \mathbf{1}\frac{m}{s} = \mathbf{1}m \cdot s^{-1}$$

<u>Inne, często używane jednostki to np.:</u>

- km/h (kilometr na godzinę)
- 1 cm/s (centymetr na sekundę)

W transporcie morskim 1 węzeł = 1 kn = 1 mila morska/godz.

Do opisywania ruchu samolotów naddźwiękowych 1 Ma - mach - prędkość równa prędkości dźwięku w powietrzu w temp. 15° - 340 m/s. Stosuje się tę jednostkę do podawania szybkości ruchu samolotów naddźwiękowych.

Ważne przeliczenia jednostek:

$$1\frac{km}{h} = \frac{10}{36}\frac{m}{s} \approx 0{,}28\frac{m}{s}$$

$$1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}$$

Przypomnienie:

1 km = 1000 m

1 cm = 0,01 m

1 mila morska = 1 852 m

Wnioski:

1 kn = 1,852 km/godz.

1 Ma = 1 224 km/h.

Droga

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B |d\vec{r}| = \int_{t_A}^{t_B} \frac{|d\vec{r}|}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} |\vec{v}| dt = \int_{t_A}^{t_B} v dt$$

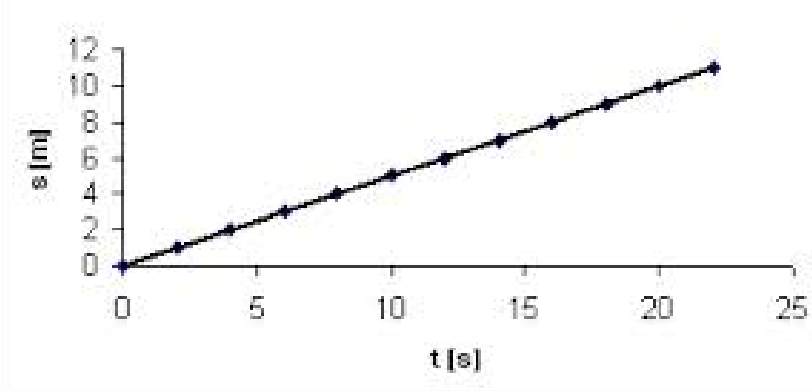
Długość drogi ***s*** jest to suma wszystkich odcinków toru, przebytych przez punkt w rozpatrywanym przedziale czasu $<t_A, t_B>$

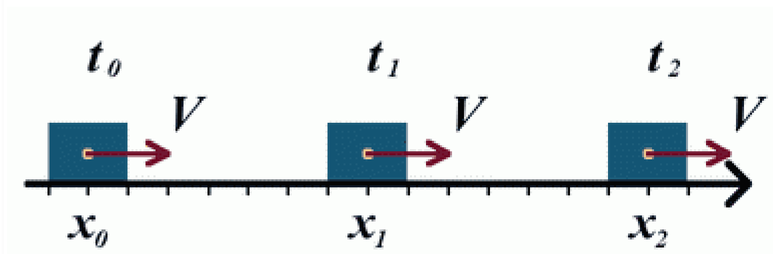
Ruch jednostajny

Ruch, w czasie którego wartość liczbowa ***v*** prędkości chwilowej punktu nie zmienia się, nazywamy ruchem ***jednostajnym.***

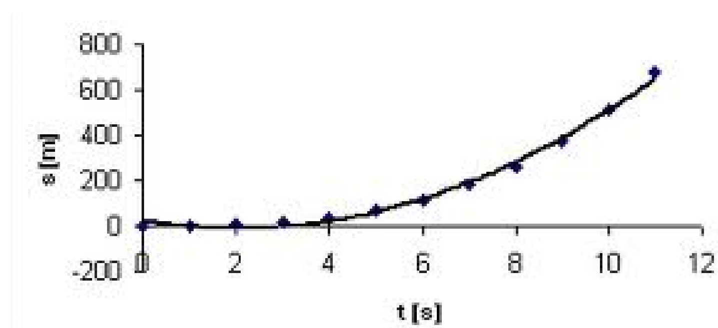
$$v = const.$$

$$\Delta s = v\int_{t_A}^{t_B} dt = v\Delta t$$



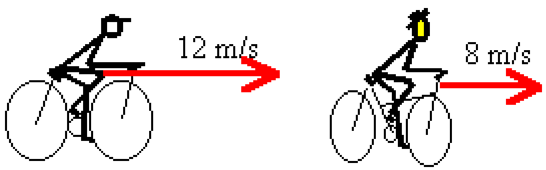


Jeżeli w równych i dowolnie krótkich odstępach czasu punkt przebywa drogi o różnej długości, to wartość liczbowa jego prędkości chwilowej zmienia się z upływem czasu. Taki ruch nazywamy ***niejednostajnym***



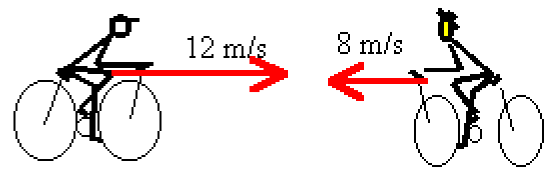
Prędkość względna

Prędkość Jasia względem Stasia jest różnicą ich prędkości względem podłoża.



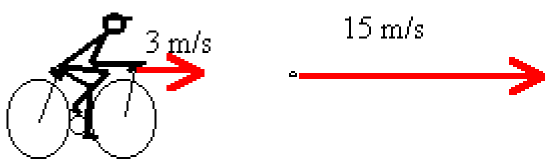
Prędkość względna wynosi 4 m/s

Prędkość Jasia względem Stasia jest teraz sumą ich prędkości względem podłoża.

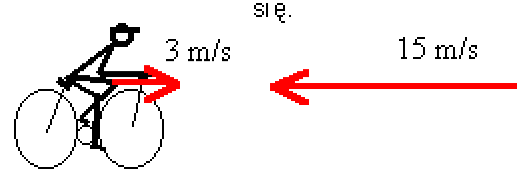


Prędkość względna wynosi 20 m/s

Mucha oddala się od Jasia z prędkością 12 m/s.



W tej sytuacji mucha zbliża się do Jasia z prędkością 18 m/s, ponieważ prędkości muchy i Jasia względem podłoża sumują się.



Przyspieszenie średnie i chwilowe

Przyspieszenie średnie to stosunek przyrostu prędkości do odstępu czasu, w jakim ten przyrost nastąpił.

$$\boxed{\vec{a}_{śr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$

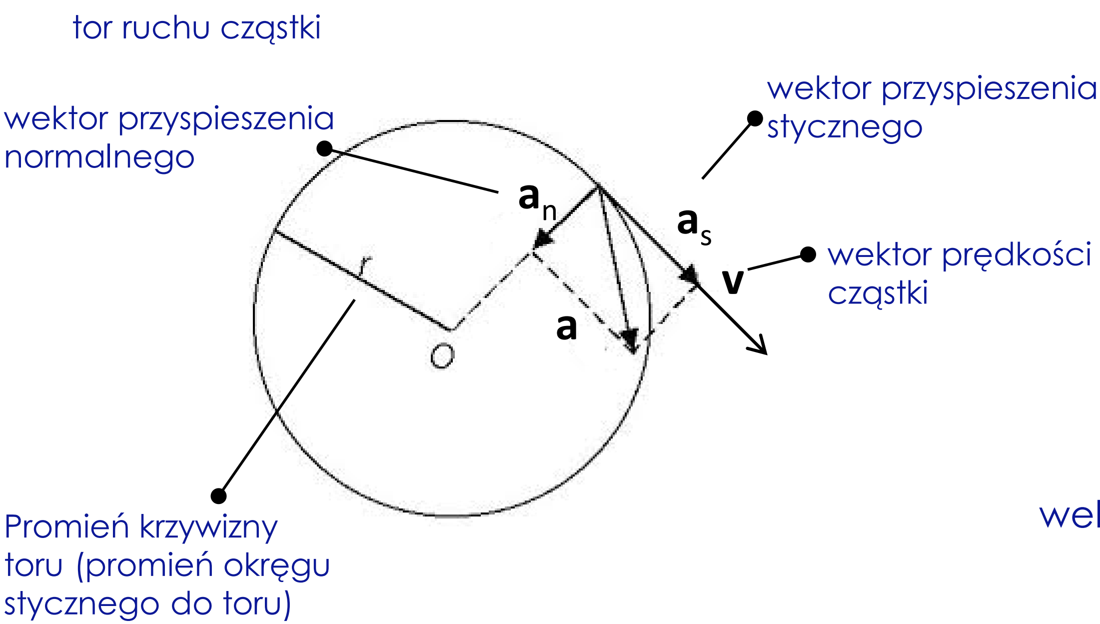
$$[a] = 1\frac{m}{s^2} = 1m \cdot s^{-2}$$

Przyspieszenie chwilowe to to granica, do której zmierza stosunek prędkości do odstępu czasu, w jakim ten przyrost nastąpił, przy nieskończenie krótkich odstępach czasu.

$$\boxed{\vec{a}_{ch} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Wektor przyspieszenia

Wektor przyspieszenia jest styczny do toru w ruchu prostoliniowym



$$\boxed{\vec{a}_w = \vec{a}_s + \vec{a}_n}$$

wektor przyspieszenia wypadkowego

$$\left|\vec{a}_w\right| = \sqrt{\vec{a}_s^{\,2} + \vec{a}_n^{\,2}}$$

Wartość wektora przyspieszenia wypadkowego

Ruchy prostoliniowe

Ruch prostoliniowy

Ruch jednostajny

$$a = \mathbf{0}, v = const$$

Ruch zmienny

- przyspieszony
- opóźniony

Ruch jednostajnie zmienny

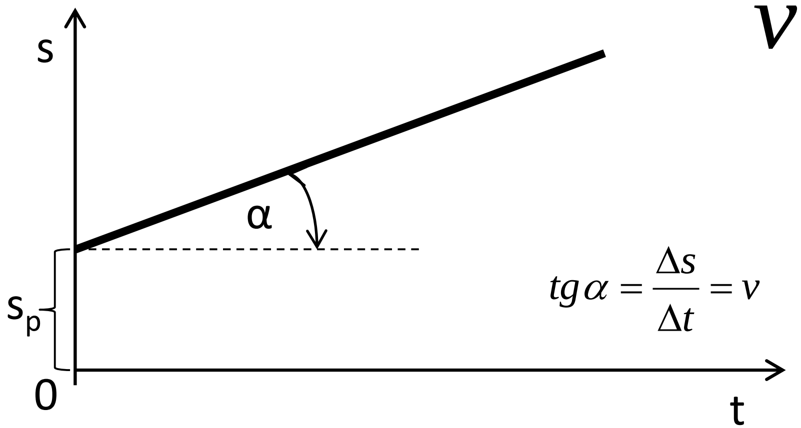
$$a = const$$

- przyspieszony
- opóźniony

Ruch niejednostajnie zmienny

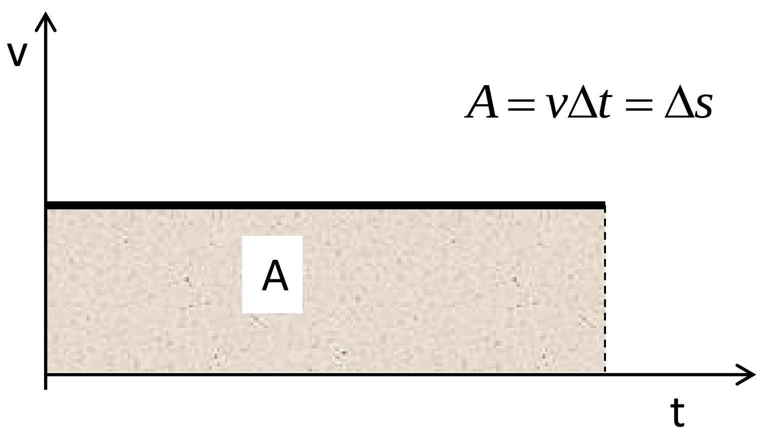
Ruch prostoliniowy jednostajny

$$v = const \quad a = \mathbf{0}$$



$$tg\alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_k - s_p}{t_k - t_p}$$



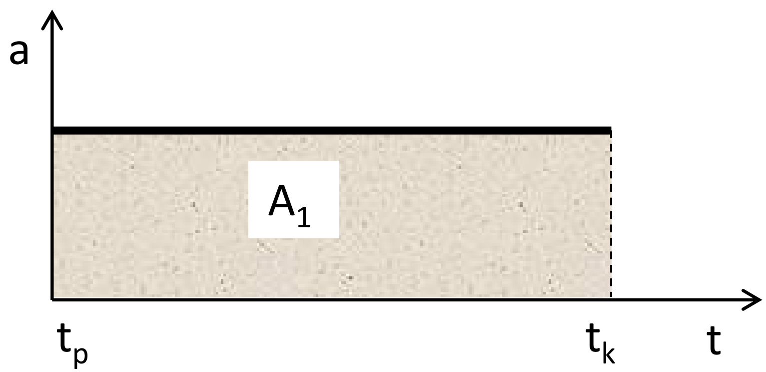
$$A = v\Delta t = \Delta s$$

$$s_k = s_p + v\Delta t$$

Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy

a=const.

$$a_{śr} = \frac{v_k - v_p}{t_k - t_p}$$

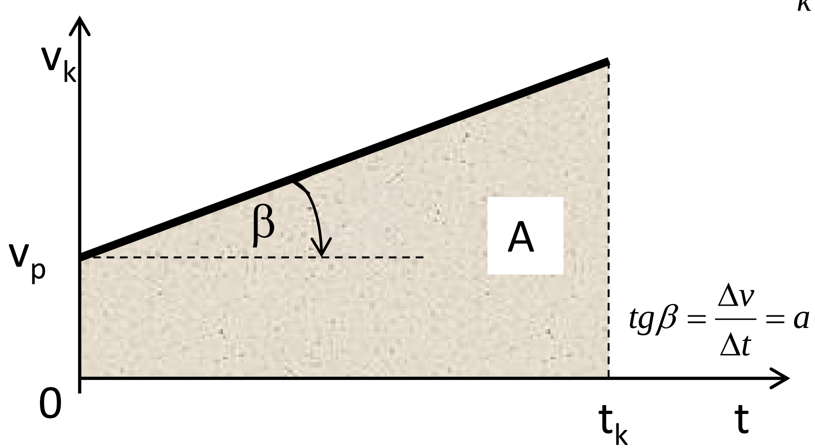


$$\boxed{v_k = v_p + a\Delta t}$$

$$v_{śr} = \frac{v_k + v_p}{2}$$

$$v_{śr} = v_p + \frac{a\Delta t}{2}$$

$$\Delta s = s_k - s_p = v_p\Delta t + \frac{1}{2}(v_k - v_p)\Delta t$$



$$\boxed{s_k = s_p + v_p\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}}$$

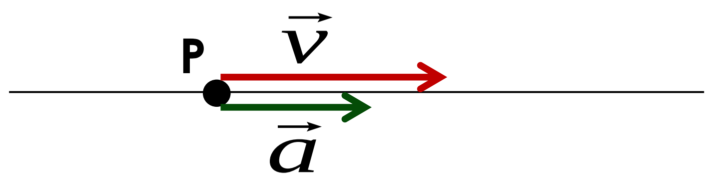
$$v_k^2 - v_p^2 = 2a\Delta s$$

Klasyfikacja ruchów ze względu na przyspieszenie

$$a = const$$

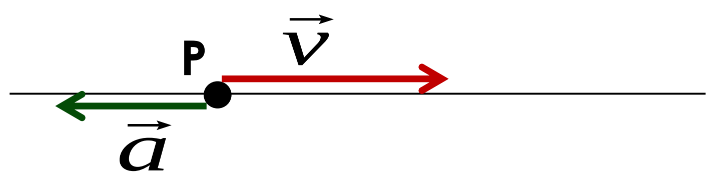
Ruch jednostajnie przyspieszony

przyspieszenie ma zwrot zgodny z prędkością



Ruch jednostajnie opóźniony

przyspieszenie ma zwrot przeciwny do prędkości



Dyskusja znaków przyspieszenia

W przypadku ruchu jednostajnie zmiennego obowiązują następujące reguły:

1. Gdy znaki (zwroty) prędkości początkowej i przyspieszenia są zgodne, wtedy ruch ciała jest ruchem przyspieszonym, gdy znaki (zwroty) tych wielkości są niezgodne, ruch jest ruchem opóźnionym

2. Gdy prędkość początkowa ciała jest równa zeru, mamy do czynienia z ruchem przyspieszonym, niezależnie od znaku (zwrotu) przyspieszenia.

PRZYKŁAD

$$s_k = s_p + v_p \Delta t + \frac{a \Delta t^2}{2}$$

$$s = 3 + 5t + 10t^2$$

$$s = 3 - 10t^2$$

$$s = 3 - 5t - 10t^2$$

$$s = 3 + 10t^2$$

wszystkie równania opisują ruchy jednostajnie przyspieszone

$$\left.\begin{aligned} s &= 3 - 5t + 10t^2 \\ s &= 3 + 5t - 10t^2 \end{aligned}\right]$$

równania opisują ruchy jednostajnie opóźnione

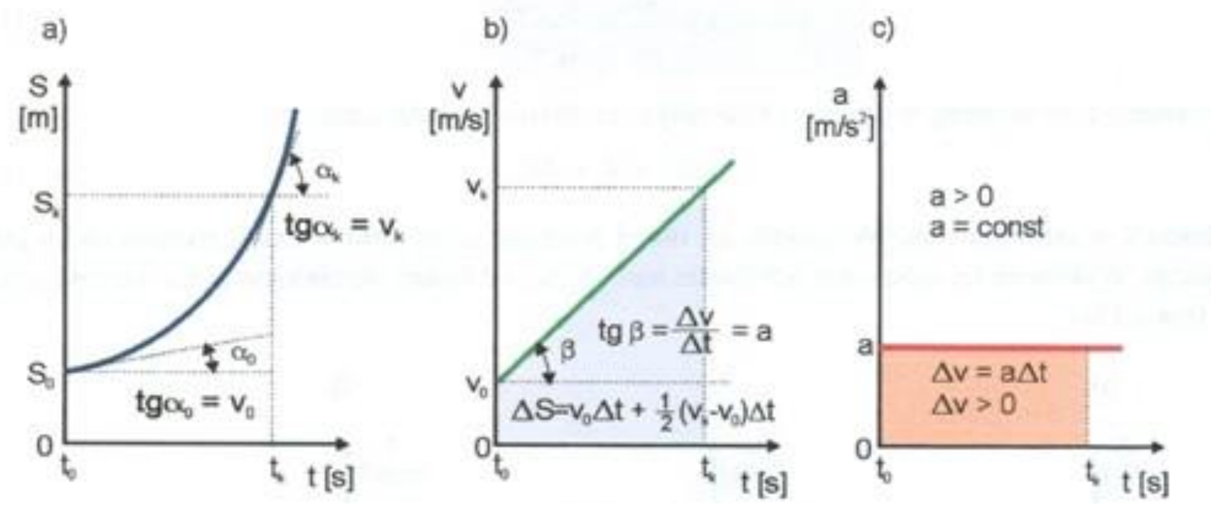
INSTYTUT INŻYNIERII MATERIAŁOWEJ

WYDZIAŁ MECHANICZNY POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

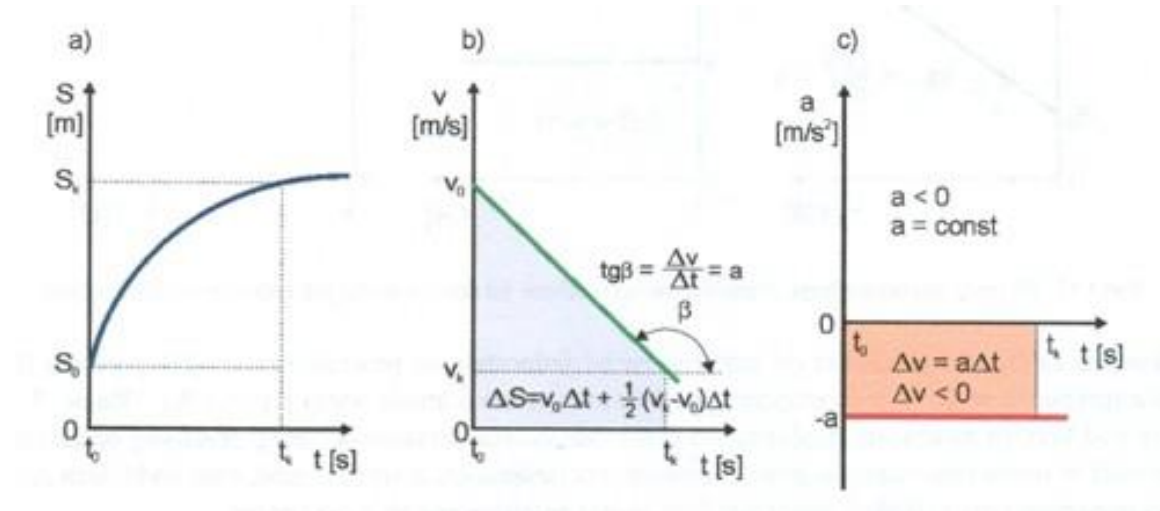
INZYNIERIAMATERIALOWAPL

Wykresy drogi, prędkości i przyspieszenia dla ruchu jednostajnie przyspieszonego a) i jednostajnie opóźnionego b)

a)



b)



Klasyfikacja rzutów

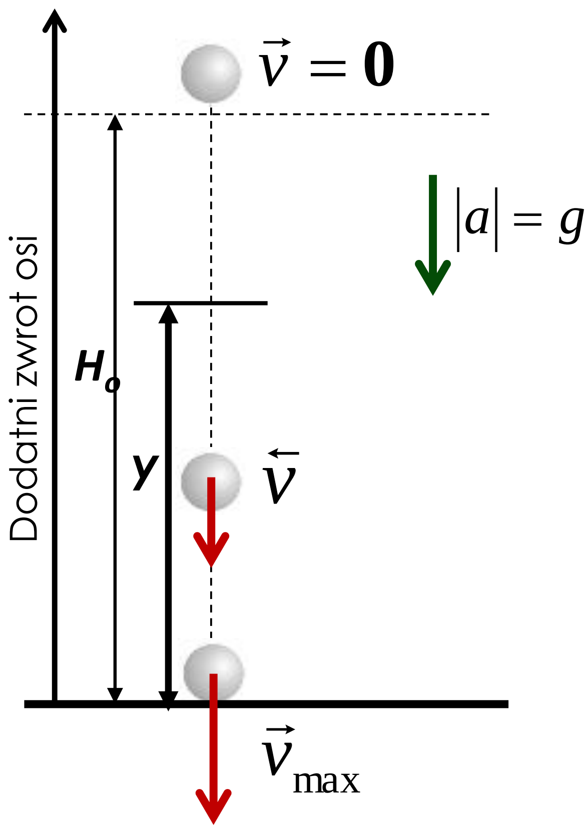
Założenia:
- jednorodność pola grawitacyjnego
- zaniedbanie sił oporu powietrza

$$\vec{a} = \vec{g}$$

W zależności od kierunku wektora prędkości początkowej $\vec{v}_o$ wyrzuconego ciała względem wektora $\vec{g}$ rozróżniamy następujące rodzaje rzutów:

1. Rzut pionowy	$\vec{v}_o \parallel \vec{g}$
2. Swobodny spadek	$\vec{v}_o \parallel \vec{g} \quad \vec{v}_o = \mathbf{0}$
3. Rzut poziomy	$\vec{v}_o \perp \vec{g}$
4. Rzut ukośny	dowolny kąt między wektorami $\vec{v}_o$ i $\vec{g}$

Spadek swobodny



Warunki początkowe:

Początkowe położenie ciała - na wysokości H_0	Początkowe położenie ciała - na wysokości H_0
Prędkość początkowa o wartości: $v_0 = 0$	W podstawowym wariancie spadku swobodnego ciało jest puszczane bez pchnięcia.
Działa przyspieszenie ziemskie o wartości g	Przyspieszenie jest cały czas skierowane w dół

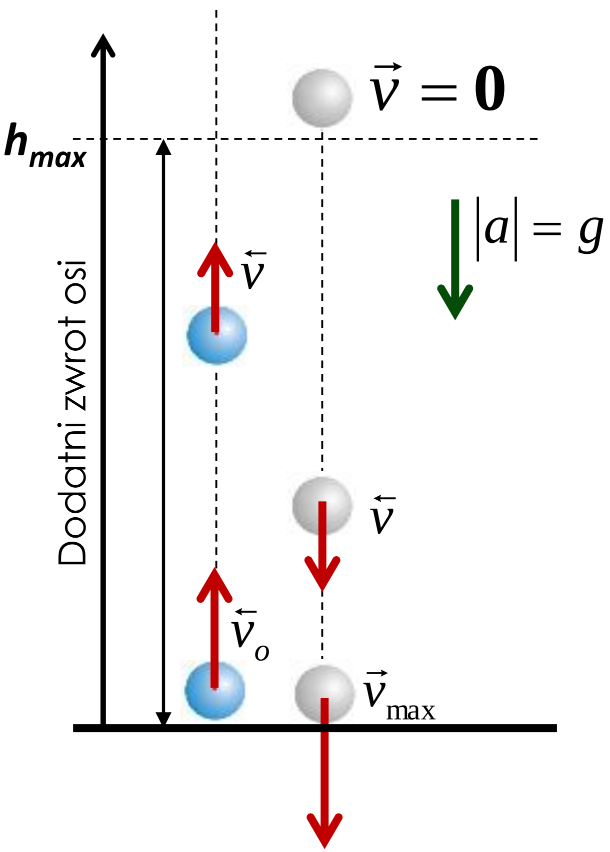
$$v_k^2 - v_p^2 = 2a\Delta s$$

$$v_{\max} = \sqrt{2gH_o}$$ wartość prędkości końcowej

$$v = -gt$$ prędkość

$$y = h_o - \frac{gt^2}{2}$$ położenie ciała w pewnej dowolnej chwili t

Rzut pionowy



Położenie początkowe $h_0 = 0$	Najczęstszy warunek, do wielu rozważań można z niego zrezygnować
Prędkość początkowa o wartości: v_0	Prędkość początkowa jest skierowana do góry
Działa przyspieszenie ziemskie o wartości g = 9,81 m/s^2	Działa przyspieszenie ziemskie o wartości g = 9,81 m/s^2

$$v = v_o - gt$$

Prędkość po upływie czasu *t* od wyrzucenia w górę

$$h = v_o t - \frac{gt^2}{2}$$

Wysokość na jakiej znajduje się ciało po upływie czasu *t* od wyrzucenia w górę:

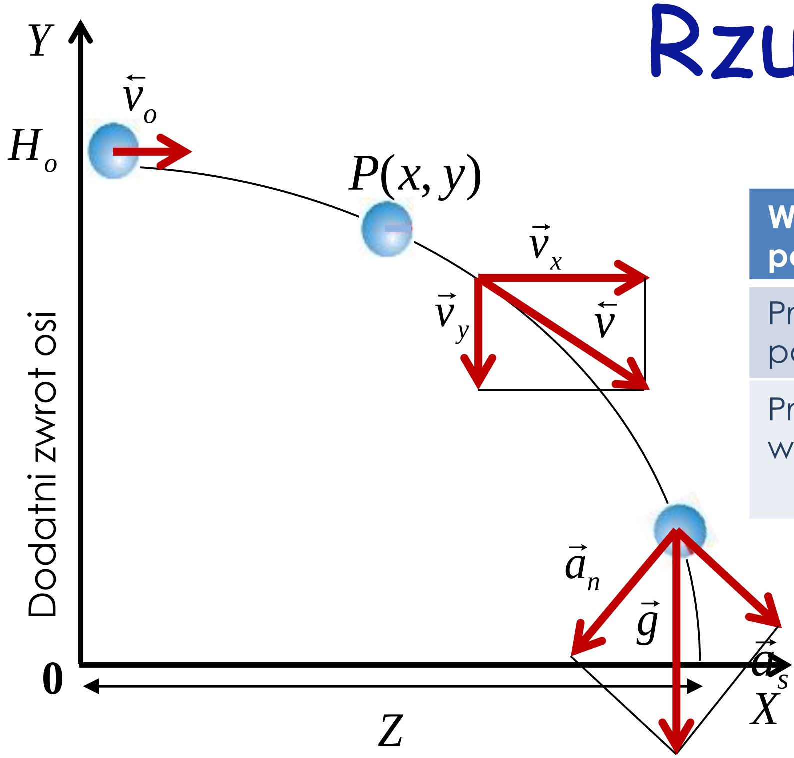
$$H_{\max} = \frac{v_o^2}{2g}$$

Maksymalna osiągnięta wysokość $v_k^2 - v_p^2 = 2a\Delta s \quad v_k = 0$

$$t_w = \frac{v_o}{g}$$

Czas wznoszenia do osiągnięcia maksymalnej wysokości

Rzut poziomy



Wysokość początkowa: H_0	**Ciało rzucamy z pewnej wysokości**
Prędkość początkowa v_0	Prędkość początkowa jest skierowana **poziomo**. Później prędkość się zakrzywia
Przyspieszenie ma wartość *g*	Przyspieszenie w tym ruchu jest stałe i cały czas jest skierowane pionowo w dół

$$v_x = v_o = const.$$ Wartość prędkości poziomej

$$v_y = -g \cdot t$$ Wartość prędkości pionowej

$$v = \sqrt{v_o^2 + (g \cdot t)^2}$$ Wartość prędkości całkowitej

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2gH_o}$$ Prędkość w momencie uderzenia o ziemię

$$h = H_o - \frac{gt^2}{2}$$ Wysokość na jakiej znajduje się ciało po czasie t

$$t = \sqrt{\frac{2H_o}{g}}$$ Czas jaki upływa do momentu upadku

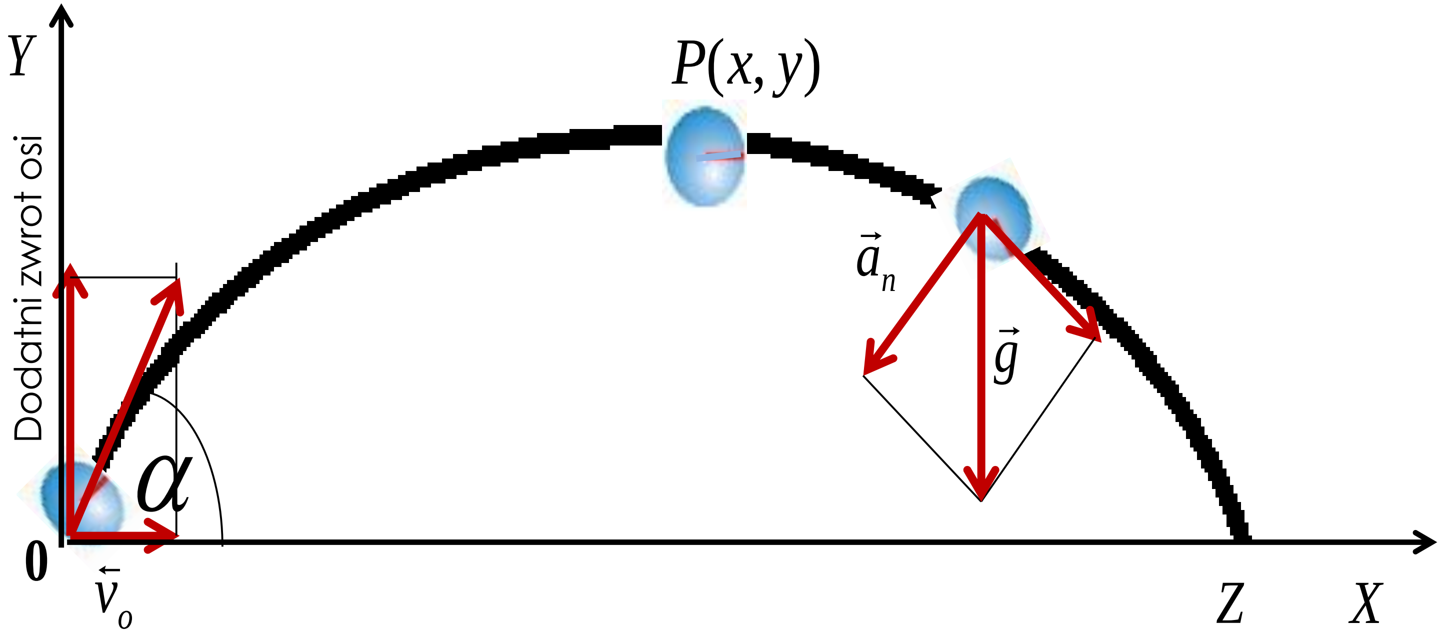
$$Z = v_o\sqrt{\frac{2H_o}{g}}$$ Zasięg rzutu poziomego (odległość przebyta w poziomie do momentu upadku)

INSTYTUT INŻYNIERII MATERIAŁOWEJ

WYDZIAŁ MECHANICZNY POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

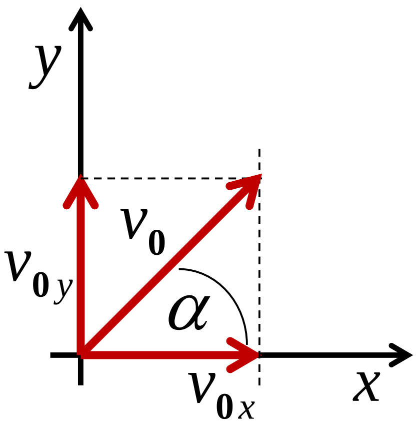
INZYNIERIAMATERIALOWAPL

Rzut ukośny



Przyspieszenie w tym ruchu jest stałe i jest skierowane pionowo w dół i ma wartość g

Rzut ukośny



$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

składowe wektora prędkości w chwili początkowej

składowe wektora prędkości w dowolnej chwili ***t***

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

współrzędne ciała w dowolnej chwili ***t***

$$x = v_x t = v_0 t \cos\alpha$$
$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Równanie toru ruchu

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\alpha)^2}$$

Eliminując czas

Czas wznoszenia do osiągnięcia maksymalnej wysokości

$$t_w = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Maksymalna osiągnięta wysokość:

$$H_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Zasięg rzutu poziomego

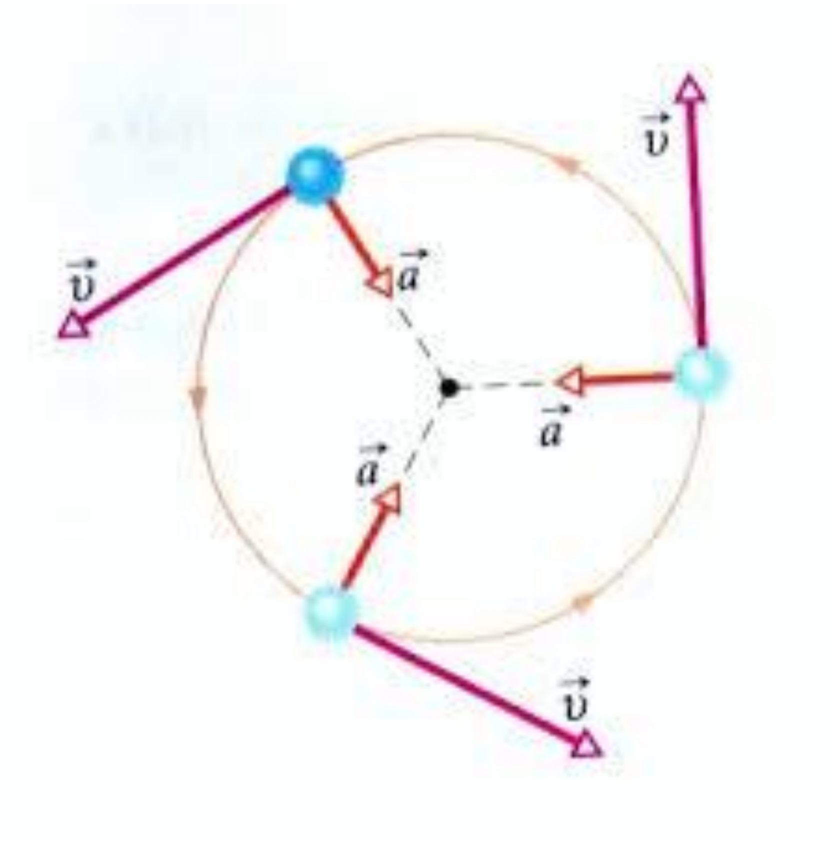
$$Z = \frac{2v_o^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_o^2}{g}\sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Ruch po okręgu

Ruch po okręgu jest to ruch, w którym ciało porusza się po torze, który jest okręgiem.

Ruch jednostajny po okręgu



Przyspieszenie dośrodkowe

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Okres obiegu

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$